El Transform de Laplace

Jaime Michelow

Los métodos operacionales han sido aplicados en el Análisis por matemáticos como Leibniz, Lagrange, Cauchy, Laplace, Boole, Riemann, etc. Pero su uso sistemático en Física y en la solución de problemas técnicos se ha debido casi exclusivamente a la labor del físico inglés Oliver Heaviside (1850-1925). Su obra permaneció ignorada por sus contemporáneos debido principalmente a la falta de rigor matemático de su trabajo.

El tratamiento moderno del cálculo operacional, requiere una base rigurosa, la que es proporcionada por el Transform de Laplace, como Heaviside mismo lo señaló.

El transform de una función puede ser definido en dos formas muy ligeramente diferentes, usaremos la adoptada por autores como Carslaw, Churchill y Doetsch.

DEFINICIONES.

Si se tiene una función f(x) se llama transform y se designa por L f(x) la siguiente integral definida:

$$1) \qquad L\, f(x) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\, dx$$

en que s es un número real positivo que se elige de modo que la integral sea convergente (*).

El transform de una función f(x) es una función del parámetro s. Esta función es única.

$$2) \qquad L\, f(x) = \varphi(s)$$

El operador L hace corresponder a una función f(x) otra función $\varphi(s)$. Se define entonces el operador L^{-1} llamado antitransform, transform inverso o transform menos uno, tal que:

(*) En partes más avanzadas de la teoría s puede ser complejo. Nótese también que f(x) sólo necesita estar definida para $X > O$.

$$3) \qquad L^{-1}\varphi(s) = f(x) \quad \text{o sea} \quad 4) \quad L^{-1}[Lf(x)] = f(x)$$

Este operador L^{-1} define una función única (continua); lo que se desprende del Teorema del Lerch, el que enunciaremos sin demostración:

«Si dos funciones continuas tienen el mismo transform ellas deben ser idénticas». O sea, si encontramos el L^{-1} de $\varphi(s)$ y esta función es continua, esta es la única función continua cuyo transform es $\varphi(s)$.

Se presentan dos clases de problemas: dada una función $f(x)$ calcular $Lf(x)$, y dado $Lf(x)$ encontrar la función $f(x)$ que lo originó.

CÁLCULO DE ALGUNOS TRANSFORM.

$$\text{Si } a = C^{te}_{\pi} \quad L(a) = \int_0^\infty e^{-sx} a\, dx = a.\frac{1}{s} \text{ en particular } L(o) = o,\ L(1) = \frac{1}{s}$$

$$L\, e^{ax} = \int_0^\infty e^{-sx}.\, e^{ax}\, dx = \int_0^\infty e^{-(s-a)x}\, dx = \frac{1}{s-a}; s > a$$

luego tenemos las fórmulas correspondientes:

$$L^{-1}(o) = o \qquad L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1 \qquad L^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right) = e^{ax}$$

PROPIEDADES FUNDAMENTALES.

$$5) \quad L[f(x) + \varphi(x)] = \int_0^\infty e^{-sx}[f(x) + \varphi(x)]\, dx = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx + \int_0^\infty e^{-sx}\varphi(x)\, dx =$$
$$= Lf(x) + L\varphi(x)$$

Transform de una suma es igual a la suma de los transform.

$$6) \qquad L[a\, f(x)] = \int_0^\infty e^{-sx} a\, f(x)\, dx = a\, L\, f(x) \qquad a = C^{te}$$

Transform del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por el transform de la función.

$$7) \ L^{-1}[L\, f(x) + L\varphi(x)] = L^{-1}\left\{L[f(x) + \varphi(x)]\right\} = f(x) + \varphi(x) = L^{-1}[Lf(x)] + L^{-1}[L(\varphi)]$$

Antitransform de una suma es igual a la suma de los antitransform.

$$8) \qquad L^{-1}[\lambda Lf(x)] = L^{-1}[L\lambda f(x)] = \lambda f(x) = \lambda L^{-1}[Lf(x)]$$

Antitransform de una función por una constante es igual al producto de la constante por el antitransform de la función.

(Se puede decir que L y L^{-1} son permeables a las constantes)

EJEMPLOS.

i) $\begin{cases} L \operatorname{sen} x = \displaystyle\int_0^\infty e^{-sx} \operatorname{sen} x \, dx \text{ integrando por partes dos veces, tenemos:} \\ L \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{s^2+1} \end{cases}$

ii) $L(\operatorname{sen} x + 1) = L \operatorname{sen} x + L1 = \dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{1}{s} = \dfrac{s^2+s+1}{s(s^2+1)}$

iii) $L^{-1}\left(\dfrac{3s+1}{(s-1)(s-2)}\right) = L^{-1}\left[\dfrac{7}{s-2} - \dfrac{4}{s-1}\right] = 7e^{2x} - 4e^{x}$

EJERCICIOS.

Demostrar que:

I $L \operatorname{sen} kx = \dfrac{k}{s^2+k^2}$

II $L \cos kx = \dfrac{s}{s^2+k^2}$

III $L(x) = \dfrac{1}{s^2}$

IV $L \dfrac{1}{(\sqrt{x})} = \sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$

V $L \operatorname{senh} kx = \dfrac{k}{s^2-k^2}$

VI $L \cosh kx = \dfrac{s}{s^2-k^2}$

VII $L^{-1}\left[\dfrac{5s+3}{s^2+1}\right] = 5 \cos x + 3 \operatorname{sen} x$

VIII $L^{-1}\left(\dfrac{3}{s^2+6}\right) = \dfrac{3}{\sqrt{6}} \operatorname{sen} \sqrt{6}\, x$

TEOREMAS IMPORTANTES.

9) $L\left[e^{ax}f(x)\right] = \displaystyle\int_0^\infty e^{-sx}e^{ax}f(x)dx = \int_0^\infty e^{-(s-a)x}f(x)dx = \varphi(s-a)$ si $Lf(x) = \varphi(s)$

siendo $s - a > 0$.

El transform del producto de una función por e^{ax} se obtiene reemplazando, en el transform de la función, s por s - a.

10) $Lf(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx = \varphi(s)$ derivando respecto a s

$$\varphi'(s) = -\int_0^\infty e^{-sx}xf(x)dx = -L[xf(x)]$$

$$\varphi''(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} x^2 f(x)\,dx = L[x^2 f(x)]$$

luego $L\left[x^n f(x)\right] = (-1)^n \varphi^n(s)$

El transform del producto de una función por x es igual a a la derivada del transform de la función respecto a s con signo opuesto, siempre que la función sea continua y

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{e^{sx}} = o \;(*)$$

EJERCICIOS.

Demostrar que:

IX.—$L(x^n) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$

X.—$Lx \operatorname{sen} Kx = \dfrac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$

XI.— $L\, x \cos kx = \dfrac{k^2-s^2}{(s^2+k^2)^2}$

XII.—$Lx^n e^{ax} = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ de 9, IX,

XIII.—$Le^{ax} \operatorname{sen} kx = \dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}$

XIV.—$Le^{ax} \cos kx = \dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$

XV.—$L^{-1}\left[\dfrac{a^2}{s(s+a)^2}\right] = 1 - e^{-ax} - axe^{-ax}$

11) $$L\eta' = \int_0^{\infty} e^{-sx} \eta' dx = \Big|\eta e^{-sx}\Big|_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} e^{-sx}\eta\, dx$$

$$\Big|\eta e^{-sx}\Big|_0^{\infty} = -\eta_o \quad \text{si} \lim_{x\to\infty} \frac{\eta}{e^{sx}} = o \quad \text{luego } L\eta' = sL\eta - \eta_o$$

Luego $L\eta'' = s^2 L\eta - s\eta_o - \eta'_o$ y

$$L\eta^n = s^n L\eta - s^{n-1}\eta_o - s^{n-2}\eta'_o - s^{n-3}\eta_o'' - \ldots\ldots - \eta_o^{\,n-1}$$

Como se demuestra inmediatamente por inducción matemática.

Si la función $\eta(x)$ y sus n derivadas son continuas y $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\eta^k}{e^{sx}} = o \quad k = (1,2,\ldots n)$

el transform de la derivada enésima está dado por la fórmula anterior (**).

(*) El teorema no se demostrará aquí en forma rigurosa. Nótese además que la condición de continuidad de la función es restrictiva.

(**) Aquí también la condición de continuidad es restrictiva.

EJERCICIOS.

XVI.—Demostrar ej. I y II con teorema 11)
XVII.— » » III » » 10)
XVIII.— » » V y VI » » 11)

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES.

Ejemplos:

i) $y''-6y'+8y=o$ aplicando L
$Ly''-6Ly'+8Ly=L(o)=o$
$s^2Ly-sy_o-y'_o-6sLy+6y_o+8Ly=o$
$Ly(s^2-6s+8)=sy_o-6y_o+y'_o$

$$Ly=\frac{sy_o-6y_o+y'_o}{(s-2)(s-4)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s-4}$$

aplicando L^{-1}

$$L^{-1}[Ly]=y=L^{-1}\left[\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s-4}\right]$$

luego: $y=Ae^{2x}+Be^{4x}$ es la solución de la ecuación.

ii) $y''-6y'+9y=e^{4x}$
$Ly''-6Ly'+9Ly=Le^{4x}$

$$Ly=\frac{\alpha}{(s-3)^2}+\frac{\beta}{(s-4)}+\frac{\gamma}{s-3}$$

$y=\gamma e^{3x}+\beta e^{4x}\alpha' xe^{3x}$

iii) $y'+y=x^2e^{-x}$
$Ly'+Ly=Lx^2e^{-x}$

$$Ly=\frac{2}{(s+1)^4}+\frac{y_o}{s+1}$$

$$y=\frac{1}{3}x^3e^{-x}+y_oe^{-x}$$

La ventaja de este método es la relación inmediata entre las constantes de integración y las condiciones iniciales. Con este método se puede desarrollar fácilmente toda la teoría de estas ecuaciones.

EJERCICIOS.

XIX.—Resolver. $y''+K^2y=O$ Sol. $y=A\cos Kx+B\operatorname{sen}Kx$
XX.— » $y''-y'-6y=2$, $y_o=1$ $y'_o=O$ Sol. $y=-1/3+8e^{3x}/15+4e^{-2x}/5$
XXI.— » el siguiente sistema:

$$y'(t)-z''(t)+z'(t)-y(t)=e^t-2$$
$$2y''(t)-z''(t)-2y'(t)+z(t)=-t$$
$$y(o)=O \quad y'(o)=O \quad z(o)=O \; z'(o)=0$$

Sol.: $y(t)=1-e^t+te^t$
$z(t)=-t+te^t$

12) ANTITRANSFORM DE UN PRODUCTO. TEOREMA DE BOREL.

El problema que se nos presenta es: dado

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(s)&=Lf_1(x)\\ \varphi_2(s)&=Lf_2(x)\end{aligned}\right\}\ \text{Determinar}\ L^{-1}\varphi_1(s)\cdot\varphi_2(s)=F(x)$$

$$\varphi_1(s)=\int_o^\infty e^{-sx}f_1(x)dx \qquad \varphi_1(s)\cdot\varphi_2(s)=\int_o^\infty e^{-sx}f_1(x)dx\cdot\int_o^\infty e^{-sy}f_2(y)dy$$

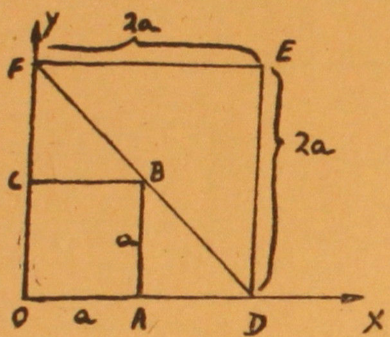
$$\varphi_2(s) = \int_0^\infty e^{-sy} f_2(y) dy \qquad \div = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(x+y)} f_1(x) \cdot f_2(y) dx\, dy$$

esta doble integral se extiende sobre todo el primer cuadrante.

$$\varphi_1(s) \cdot \varphi_2(s) = \lim_{a \to \infty} \int_0^a \int_0^a e^{-s(x+y)} f_1(x) \cdot f_2(y) dx\, dy$$

$$= \lim_{2a \to \infty} \int_0^{2a} \int_0^{2a} e^{-s(x+y)} f_1(x) f_2(y)\, dx\, dy.$$

luego la doble integral sobre CBADEF y Δ FED se anulan si $a \to \infty$, por lo tanto



$$\lim_{a \to \infty} \iint_{ODEF} = \lim_{a \to \infty} \iint_{ODF}$$

El campo de integración será el ΔODF. $x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad 0 \leq x + y \leq 2a$

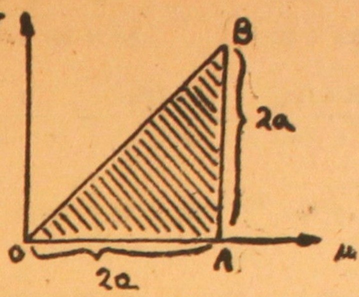
$$\varphi_1(s) \cdot \varphi_2(s) = \lim_{2a \to \infty} \iint_{ODF.} e^{-s(x+y)} f_1(x) \cdot f_2(y) dx\, dy$$

haciendo un cambio de variables:

$x + y = u$ $y = v$	$x = u - v$	$v \geq 0$ $u \geq 0$	$u \leq 2a$ $v \leq u$

La región de integración ha quedado transformada en:

$$y \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} du\, dv = du\, dv.$$



entonces:

$$\varphi_1(s)\cdot\varphi_2(s) = \lim_{2a\to\infty} \iint_{OAB} e^{-su} f_1(u-v)\cdot f_2(v)\,du\,dv$$

$$\div = \int_0^\infty e^{-su}du \int_0^u f_1(u-v)\cdot f_2(v)\,dv = L\int_0^u f_1(u-v)\cdot f_2(v)\,dv$$

$$L^{-1}\varphi_1(s)\cdot\varphi_2(s) = \int_0^x f_1(x-v)\cdot f_2(v)\,dv$$

lo que constituye el teorema de Borel.

EJEMPLO.

Resolver la ecuación:

$$y = \operatorname{sen} x + y\int_0^x \operatorname{sen}(x-t)\,dt$$

$$y = \operatorname{sen} x + \int_0^x y \operatorname{sen}(x-t)dt \quad \text{aplicando } L$$

$$Ly = L \operatorname{sen} x + L\int_0^x y \operatorname{sen}(x-t)\,dt$$

por 12) $Ly = \dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{1}{s^2+1}Ly;$

$$Ly = \frac{1}{s^2}$$

aplicando L^{-1} $y = x$

que es una solución de la ecuación.

EJERCICIOS.

XXII.—Demostrar que $L^{-1}\dfrac{1}{s(1+s^2)} = 1-\cos x$ con teorema 12).

XXXIII.— » » $\underbrace{\iiint\ldots\int}_{(n)} f(x)d^nx = \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^x f(v)(x-v)^{n-1}dv$

EJEMPLOS VARIOS.

i) Resolver $Ay'' + By' + Cy = f(x)$ aplicando L

$A(s^2Ly - sy_0 - y'_0) + B(sLy - y_0) + CLy = Lf(x)$

$s'Ly - sy_0 - y'_0$

$Ly(As^2 + Bs + C) = Lf(x) + Asy_0 + Ay'_0 + By_0 = Lf(x) + \alpha s + \beta$

$$Ly = \frac{Lf(x)}{As^2 + Bs + C} + \frac{\alpha s + \beta}{As^2 + Bs + C}$$

$$Ly = \frac{R\,L\,f(x)}{s+a} + \frac{Q\,L\,f(x)}{s+b} + \frac{u}{s+a} + \frac{v}{s+b}$$

$$y = ue^{-ax} + ve^{-bx} + R\int_0^x f(v)e^{-a(x-v)}dv + Q\int_0^x f(v)e^{-b(x-v)}dv$$

Incluso f(x) puede ser una función empírica dada numéricamente por oscilogramas, en cuyo caso la integral se puede efectuar numéricamente.

Avaluar la integral definida:

ii) $I(t) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} tx}{x} dx$ · aplicando L

$$LI(t) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} tx}{x} dx = \int_0^\infty \frac{dx}{x}\int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen} tx\ dt = \int_0^\infty \frac{dx}{x} L \operatorname{sen} xt$$

$$\therefore = \int_0^\infty \frac{dx}{x}\cdot\frac{x}{s^2+x^2} = \int_0^\infty \frac{dx}{s^2+x^2} = \frac{1}{s}\left|\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{s}\right|_0^\infty = \frac{1}{s}\cdot\frac{\pi}{2}$$

aplicando L^{-1} $\qquad I(t) = \frac{\pi}{2}$

EJERCICIOS.

XXIV—Calcular la integral $I(t) = \int_0^\infty \frac{\cos tx}{x^2+b^2} dx = \frac{\pi}{2b} e^{-bt}$

XXV— » » » $\int_{-\infty}^\infty \frac{x \operatorname{sen} tx}{a^2+x^2} dx = \pi e^{-at}$